

# VU Research Portal

## Nonlinear Waves in Local and Nonlocal Media

Bakker, B.H.

2019

### **document version**

Publisher's PDF, also known as Version of record

[Link to publication in VU Research Portal](#)

### **citation for published version (APA)**

Bakker, B. H. (2019). *Nonlinear Waves in Local and Nonlocal Media: A Topological Approach*. [PhD-Thesis - Research and graduation internal, Vrije Universiteit Amsterdam].

### **General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

### **Take down policy**

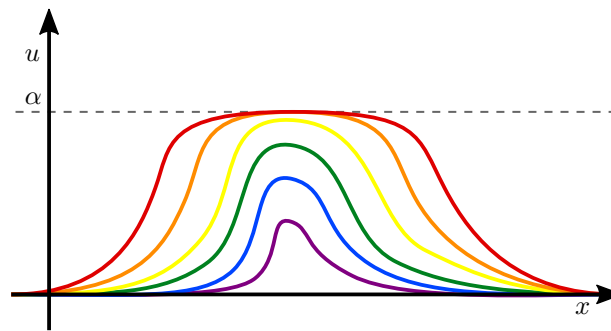
If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

### **E-mail address:**

[vuresearchportal.ub@vu.nl](mailto:vuresearchportal.ub@vu.nl)

# Samenvatting

Het globale thema van dit proefschrift is de studie van patroonvormende systemen. Wat hiermee bedoeld wordt is wellicht het beste toe te lichten aan de hand van een voorbeeld uit de populatiedynamica. Beschouw bijvoorbeeld een populatie eenhoorns in een ecosysteem zonder natuurlijke vijanden. Als de eenhoorns op één plek blijven zullen ze zich voortplanten tot een zekere populatiegrootte  $\alpha$  (afhankelijk van onder andere geboorte- en sterftecijfers en de draagcapaciteit van het leefgebied) bereikt is. Dit is een voorbeeld van *niet-lineaire groei*. Ruimtelijke spreiding van de eenhoorns heeft het tegenovergestelde als gevolg: als we het effect van populatiegroei tijdelijk vergeten zorgt de migratie van eenhoorns er juist voor dat de gemiddelde populatiegrootte op een gegeven locatie naar 0 zal convergeren. Wanneer we deze twee mechanismen combineren zien we een interessant fenomeen, namelijk een competitie tussen processen die de populatie naar  $\alpha$  en naar 0 proberen te sturen. In Figuur 1 is het resulterende gedrag schematisch weergegeven. We zien een golf ontstaan in dit systeem. Omdat de golf in Figuur 1 niet zou bestaan zonder de (niet-lineaire) groei naar  $\alpha$  noemen we zo een golf ook wel een *niet-lineaire golf*.



Figuur 1: Het ontstaan van een niet-lineaire golf. Van onder naar boven langs de regenboog de groei van de populatie  $u$ .

Het voorgaande voorbeeld kan wiskundig gemodelleerd worden aan de hand van een zogenaamde *reactie-diffusievergelijking*. Het woord “reactie” slaat hier op de (niet-lineaire) groei, terwijl “diffusie” een model is voor ruimtelijke spreiding. Merk op dat de nonlineaire golf in Figuur 1 bestaat uit twee overgangen van  $\alpha$  naar 0, eentje die naar links beweegt en eentje die naar rechts beweegt. Zo een bewegende overgang tussen twee toestanden noemen we een *lopende golf*. Op de voorzijde van dit proefschrift is een schematische weergave van een lopende golf te zien.

Het blijkt dat het bestaan van lopende golven een algemene eigenschap van reactie-

diffusievergelijkingen is. Dit is het onderwerp van Hoofdstuk 2, waar we kijken naar modellen voor lopende golven in een algemene klasse van reactie-diffusievergelijkingen. De klasse modellen die we beschouwen heeft de speciale eigenschap dat er een *energielandschap* aan toe te kennen is. De hoogtelijnen van zo een energielandschap zijn weergegeven op de achterzijde van dit proefschrift. De speciale eigenschap van deze landschappen is dat de oplossingen van de modellen enkel kunnen dalen langs de landschappen. We kunnen het vinden van lopende golven ons dan voorstellen als het naar beneden skiën over zo een landschap. Dit heeft grote gevolgen, omdat we bijvoorbeeld geen rondjes kunnen skiën en er dus geen periodieke oplossingen bestaan in ons model voor lopende golven. Soms zullen we niet verder komen doordat we in een bergpas of dal terecht zijn gekomen. Wiskundigen noemen zulke plaatsen de *kritieke punten* van het landschap. Deze kritieke punten corresponderen precies aan de toestanden waartussen we lopende golven kunnen vinden.

Stel je nu voor dat ons energielandschap grenst aan een zee en de dijken breken. Als gevolg loopt het landschap langzaam onder water. Ook nu blijken de kritieke punten van het landschap een belangrijke rol te spelen. Telkens als het waterniveau op de hoogte van een kritiek punt komt zal de topografie van het landschap drastisch veranderen. Bijvoorbeeld, wat eerst een schiereiland was kan na stijging van de waterspiegel plotseling een eiland worden. Ook kunnen bijvoorbeeld hele bergtoppen onder water verdwijnen. Het blijkt dat alleen de manier waarop de topografie verandert al informatie bevat over de lopende golven. Om deze reden noemen we de theorie ontwikkeld in Hoofdstuk 2 ook wel een *topologische methode*.

De enige woorden uit de titel van dit proefschrift die we nog niet verklaard hebben zijn *lokale* en *niet-lokale media*. Hier doelt “media” op de ruimtelijke configuratieruimte, in het voorgaande voorbeeld was dit het ecosysteem. De reactie-diffusievergelijkingen die we hierboven beschreven zijn voorbeelden van modellen in lokale media. Hierbij is de achterliggende aanname dat de niet-lineaire groei en ruimtelijke spreiding op een vergelijkbare tijdschaal plaatsvinden. Dit is echter lang niet altijd een redelijke aanname. Je kan bijvoorbeeld denken aan vogels die in korte tijd lange afstanden kunnen afleggen, planten die via een uitgebreid wortelstelsel over lange afstanden in competitie zijn voor voedingsstoffen, of neuronen die over lange afstanden met elkaar kunnen communiceren. Situaties waarbij de ruimtelijke spreiding veel sneller plaatsvindt dan de niet-lineaire groei zijn vaak beter te modelleren in niet-lokale media. In niet-lokale media kan ruimtelijke spreiding instantaan plaatsvinden. Zulke modellen zijn het onderwerp van de laatste twee hoofdstukken van dit proefschrift.

In Hoofdstuk 3 beschrijven we een klasse van modellen voor golven in niet-lokale media waarvoor we weer energielandschappen aan golven kunnen toekennen. Het bestaan van deze energielandschappen blijkt gerelateerd te zijn aan symmetriën in de modellen. Vergeleken met reactie-diffusievergelijkingen is dit een stuk lastiger om aan te tonen omdat standaard resultaten uit de differentiaalrekening niet van toepassing zijn. Verder laten we zien dat zekere golven met een kleine amplitude in essentie beschreven kunnen worden aan de hand van klassieke mechanische systemen.

Als laatste, in Hoofdstuk 4 combineren we de ideeën uit zowel Hoofdstuk 2 en Hoofdstuk 3. Daar laten we zien dat ook voor lopende golven in modellen in niet-lokale media de topografie van energielandschappen informatie bevat over lopende golven. Hiermee zijn we in staat het bestaan van golven in niet-lokale media aan te tonen, welke met de voorheen bekende technieken niet binnen handbereik waren.